分数の数列の和

日付（　　月　　日　　曜日 ）
名前（　　）

分数の数列の和

数列の和を部分分数に分けてを求めることができる

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$$

ただし，$a<b,\ a\neq b$

（Step１） 分母の（　一般項　）を求める

（Step２）（　部分分数　）に分ける

（Step３）具体的な数列をかく

（Step４）消せる項どうしで消していく

例　$k=2n,\ a=-1,\ b=1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

例題

次の初項から n 項までの和を求めなさい。

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\frac{1}{10\cdot13}+\cdots$$

解　一般項を a_n とすると，

（Step１）$$a_n=\frac{1}{\{1+3(n-1)\}\{4+3(n-1)\}}=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

初項：1，交差：3 の等差数列
初項：4，交差：3 の等差数列

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

（Step２）$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$k=3n,\ a=-2,\ b=1$

（Step３）$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$$

（Step４）$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$