等差数列×等比数列の和

日付（　　月　　日　　曜日　）
名前（　　　　　　　　　　　）

POINT

等差数列×等比数列の和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$$

ただし，a_n：等差数列，b_n：等比数列

（Step 1）等差数列と等比数列の（　一般項　）を求める

（Step 2）和 S_n に対して（　公比　）をかけたものを引く

（Step 3）式変形していき，（ 等比数列の和 ）に帰着させる

復習

等比数列の和（初項 a，公比 r）

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ または } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

例題

次の初項から n 項までの和を求めなさい。

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots$$

解　初項から n 項までの和を S_n とする。

（Step 1）$S_n = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$

初項：1，交差：2 の等差数列
初項：1，公比：3 の等比数列

（Step 2）両辺に 3 をかけると，

$$3S_n = \quad 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n$$

辺々を引くと，

$$S_n - 3S_n = 1 \cdot 1 + \underline{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^{n-1}} - (2n-1) \cdot 3^n$$

（Step 3）

$$-2S_n = 1 + \underline{\frac{2(3^n - 1)}{3-1}} - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$-2S_n = 1 + 3^n - 1 - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$-2S_n = 2(1-n) \cdot 3^n$$

$$S_n = (n-1) \cdot 3^n$$