ベクトルの内積

日付(　　月　　日　　曜日　)
名前(　　　　　　　　　　　)

POINT

ベクトルの内積

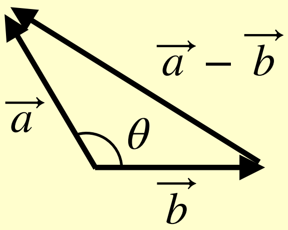
空間のベクトルにおいて, 平面と同様に次のことが成り立つ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

また, $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき, この2つのベクトルがなす角を θ とする。ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



例題

次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積およびそのなす角 θ を求めなさい。

$$\vec{a} = (2,\ -3,\ 1),\ \vec{b}(-3,\ 1,\ 2)$$

解

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times(-3) + (-3)\times 1 + 1\times 2 = -7$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

ベクトルの内積（三角形）

日付（　　月　　日　　曜日　）
名前（　　　　　　　　　　　）

ベクトルの内積（三角形）

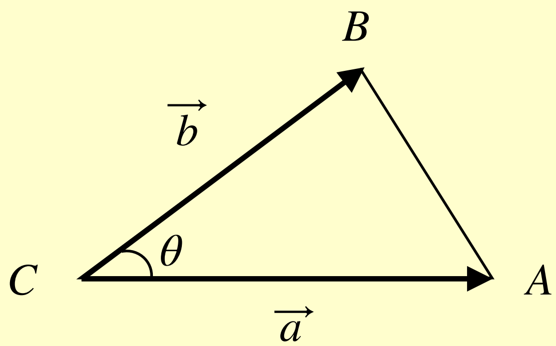
空間のベクトルにおいて, 平面と同様に次のことが成り立つ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

また, $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき, この2つのベクトルがなす角を θ とする。ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$



例題

3点 $A(1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 5,\ 3)$, $C(-1,\ 5,\ 6)$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。

解

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 5-3,\ 3-2)=(1,\ 2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1-1,\ 5-3,\ 6-2)=(-2,\ 2,\ 4)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+2\times2+1\times4=6$$

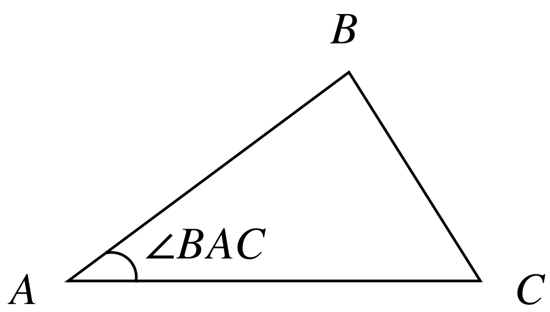
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$$

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より,

$\angle BAC=60^\circ$



ベクトルの垂直

日付(　　月　　日　　曜日　)
名前 (　　　　　　　　　　)

ベクトルの垂直

空間のベクトルの垂直条件について, 次のことが成り立つ

$\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$ で $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

② $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

例題

2つのベクトル $\vec{a} = (2,\ -1,\ 0),\ \vec{b} = (6,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で, 大きさが3のベクトル $\vec{p}$ を求めなさい。

解 $\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a} \perp \vec{p}$ より, $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ であるから

$2x - y = 0$ ・・・①

ベクトルの垂直条件

$\vec{b} \perp \vec{p}$ より, $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$ であるから

$6x - 2y + z = 0$ ・・・②

ベクトルの垂直条件

$|\vec{p}|^2 = 3^2$ より, $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ ・・・③

ベクトルの大きさ3

①より, $y = 2x$ ・・・④

①, ②より, $6x - 2(2x) + z = 0$ つまり $z = -2x$ ・・・⑤

④, ⑤を③に代入すると, $x^2 + (2x)^2 + (-2x)^2 = 9$

$9x^2 = 9$ よって, $x = \pm 1$

$x = 1$ のとき, $y = 2,\ z = -2$

$x = -1$ のとき, $y = -2,\ z = 2$

よって, $\vec{p} = (1,\ 2,\ -2),\ (-1,\ -2,\ 2)$